

# Fuzzy Complement

$$C: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$C: \mu_A(x) \longrightarrow \mu_{\bar{A}}(x)$$

$$C[\mu_A(x)] = \mu_{\bar{A}}(x)$$

في هذا الجزء ندرس بعض المؤثرات لتعيين قيمة الكلمة بحيث أنه من خلالها يمكن توسيع أو تغيير كلمة الفئة بمعنى

## Axiom of Complement

$$① C(0) = 1 \quad ; \quad C(1) = 0$$

$$② a < b \quad ; \quad a, b \in [0, 1] \Rightarrow C(b) \leq C(a)$$

$$\text{if } a = \mu_A(x) \quad ; \quad b = \mu_A(y)$$

$$\mu_A(x) \leq \mu_A(y) \Rightarrow C[\mu_A(x)] \geq C[\mu_A(y)]$$

③  $c$  is continuous function.

④  $c[c(a)] = a$  ,  $a = \mu_A(x)$

$$c[c(\mu_A(x))] = \mu_A(x)$$

من خلال الخواص 1، 2، 3، 4 يمكن تعريف أي دالة كمplement  
أن تكون معبرة عن درجة الإمتلاء الكاملة بشرط تحقيقها  
للأربع خواص.

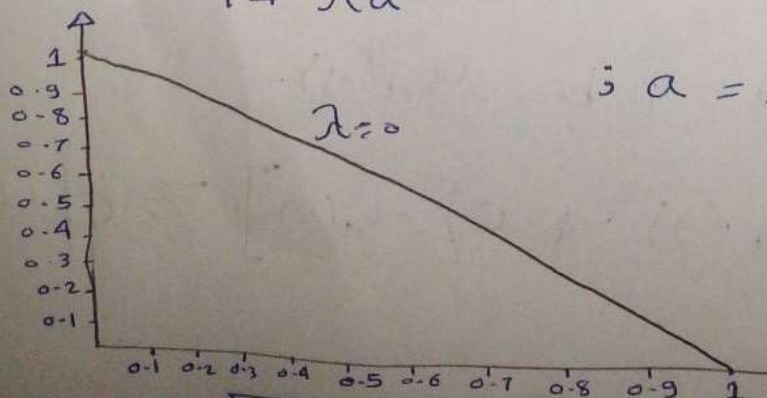
~~من الممكن أن يكون لها أكثر من دالة كمplement~~

عندما يعطى أي دالة و المطلوب أن تكون مؤثر في  
المجموعة لابد أن نتحقق من الشرط 1، 2.

1 Sugeno fuzzy complements class:-

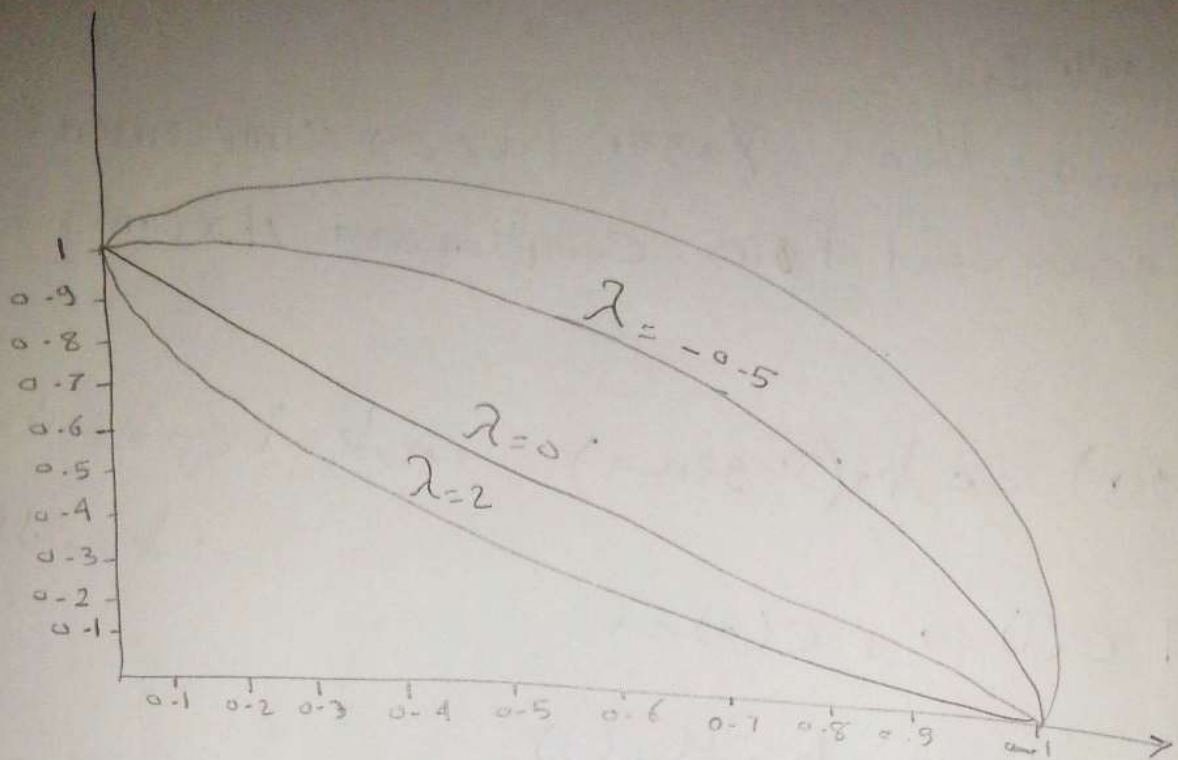
$$C_{\lambda}(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \quad ; \quad -1 < \lambda < \infty$$

$$; a = \mu_A(x)$$



2 Lec. 11

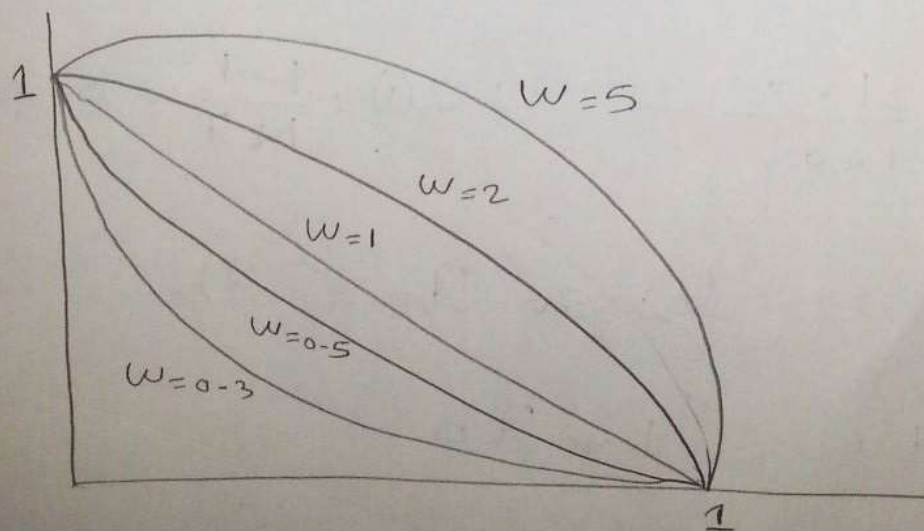




## [2] Yager Fuzzy Complement class

$$C_w(a) = (1 - a^w)^{1/w} \quad 0 < w < \infty$$

$$a = \mu_A(x)$$



### Example

\* show that Yager Fuzzy Complement and Sugeno satisfies Complement Axioms.

نحاول توفيق أن طريقة (Sugeno) وطريقة (Yager) تحقق الشروط:

$$\boxed{1} \quad c(1) = 0 ; c(0) = 1$$

$$\boxed{2} \quad a = \mu_A(x), b = \mu_A(y)$$

$$a \leq b \Rightarrow c(a) \geq c(b)$$

$$\boxed{A} \quad \underline{\text{Sugeno}}$$

$$C_{\lambda}(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} ; a = \mu_A(x)$$

$$c(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1 ; c(1) = \frac{1-1}{1+\lambda} = 0$$

$$a \leq b \Rightarrow \cancel{\lambda a \leq \lambda b} ; \lambda \geq 0$$

$$1 + \lambda a \leq 1 + \lambda b$$

$$\frac{1}{1 + \lambda a} \geq \frac{1}{1 + \lambda b} \rightarrow \textcircled{1}$$



$$a \leq b \Rightarrow -a \succcurlyeq -b \Rightarrow 1-a \succcurlyeq 1-b \rightarrow \textcircled{2}$$

Multiply ①, ②

$$\frac{1-a}{1+\lambda a} \succcurlyeq \frac{1-b}{1+\lambda b}$$

$$c(a) \succcurlyeq c(b)$$

then Sugeno satisfy axioms. ~~≠~~

[B] Yager Complement

$$C_w(a) = (1-a^w)^{1/w}$$

$$\rightarrow C_w(0) = (1-0^w)^{1/w} = 1$$

$$C_w(1) = (1-1^w)^{1/w} = 0$$

$$\rightarrow a \leq b \Rightarrow C_w(a) \succcurlyeq C_w(b)$$

$$a \leq b \Rightarrow a^w \leq b^w \Rightarrow -a^w \succcurlyeq -b^w$$

$$\Rightarrow 1-a^w \succcurlyeq 1-b^w \Rightarrow (1-a^w)^{1/w} \succcurlyeq (1-b^w)^{1/w}$$

$$\therefore C_w(a) \not\approx C_w(b)$$

then Yager satisfy the axioms ~~##~~

\* Consider the fuzzy set

$$A = \frac{0.1}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.6}{3} \quad \text{Find}$$

[1] Sugeno Fuzzy Complements class at  
 $\lambda = 0.5$  ;  $\lambda = 1$

$$\left( \text{Sugeno}(\bar{A}) \right)_{\lambda=0.5} \quad , \quad \left( \text{Sugeno}(\bar{A}) \right)_{\lambda=1}$$

[2] Compare  $\alpha$ -cuts of sugeno class  
 at  $\alpha = 0.4$  ;  $\lambda = 0.5$  ;  $\lambda = 1$  ;  $\lambda = 0$

الواجب حلها بواسطة (Yager)



Solution

$$C_{\lambda}(M_A(x)) = \frac{1 - M_A(x)}{1 + \lambda M_A(x)}$$

at:  $\lambda = 0.5$

$$\bar{A} = \frac{[M_{\bar{A}}(1)]_{\lambda=0.5}}{1} + \frac{[M_{\bar{A}}(2)]_{\lambda=0.5}}{2} + \frac{[M_{\bar{A}}(3)]_{\lambda=0.5}}{3}$$

$$\frac{[M_{\bar{A}}(1)]_{\lambda=0.5}}{1} = \frac{1 - 0.1}{1 + (0.5)(0.1)} = 0.857$$

$$\frac{[M_{\bar{A}}(2)]_{\lambda=0.5}}{2} = \frac{1 - 0.2}{1 + (0.5)(0.2)} = 0.727$$

$$\frac{[M_{\bar{A}}(3)]_{\lambda=0.5}}{3} = \frac{1 - 0.6}{1 + (0.5)(0.6)} = 0.308$$

$$\bar{A} = \frac{0.857}{1} + \frac{0.727}{2} + \frac{0.308}{3}$$

← في الصفحة السابقة كسرنا مفهوم  $\lambda$  أنه ممكن أن يتواءم

أي عنده لازم نطرحه منه (1) هنا لو جمعنا الغنير  
وممكنه قد يكون  $=$  أو  $<$  أو  $7$  أو  $1$  على حسب  $\lambda$ .

$$\lambda = 1$$

$$\bar{A} = \frac{[\mu_{\bar{A}}(1)]_{\lambda=1}}{1} + \frac{[\mu_{\bar{A}}(2)]_{\lambda=1}}{2} + \frac{[\mu_{\bar{A}}(3)]_{\lambda=1}}{3}$$

← حينها عطلول :-

$$\bar{A} = \frac{0.818}{1} + \frac{0.666}{2} + \frac{0.25}{3}$$

[2]  $\alpha$ -cuts of  $\bar{A}$  at  $\lambda = 0.5$

$$0.4 - (\text{Sugeno}(\bar{A}))_{\lambda=0.5} = \{1, 2\}$$

$$0.4 - (\text{Sugeno}(\bar{A}))_{\lambda=1} = \{1, 2\}$$



من ملاحظنا أنه عند زيادة قيمة  $\lambda$  وتثبيت قيمة  $\alpha$   
 فإن الفصول الناتجة ~~تزداد~~ يزداد العناصر فيها.

→  $\alpha$ -cuts of  $\bar{A}$  at  $\lambda=0$

$$0.4 - (\text{Sugeno}(\bar{A}))_{\lambda=0} = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{Cause: } (\text{Sugeno}(\bar{A}))_{\lambda=0} = 1 - \bar{A} = \frac{0.9}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.4}{3}$$

### Fuzzy union (S-norms)

$$S: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$S[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cup B}(x)$$

← نحاول تكوين دالة من درجة انتماء عنصر واحد بالنسبة

لثنتين مختلفتين لتعطي درجة انتماء العنصر بالنسبة

لاتحاد ~~ال~~ الفئتين

~~من عند استنتاج أي دالة لأي عنصر لا بد أن تكون~~

مع عند الاستنتاج أى صورة لذى دالة لابد أن يتحقق الشرط :-

### S-norm axioms

$$\boxed{1} \quad S(1,1) = 1 ; S(0,a) = S(a,0) = a ; a = M_A(x)$$

$$\boxed{2} \quad S(a,b) = S(b,a)$$

$$\boxed{3} \quad a \leq \tilde{a} ; b \leq \tilde{b}$$

$$S(a,b) \leq S(\tilde{a},\tilde{b})$$

$$\boxed{4} \quad S(S(a,b,c)) = S(a,S(b,c))$$

### 1 Domb class :-

$$S_{\lambda}(a,b) = \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$a < \lambda < \infty$$



## [2] Dubois - Prade class :-

$$S_{\alpha}(a,b) = \frac{a+b-ab-\min(a,b,1-\alpha)}{\max(1-a,1-b,\alpha)}$$

## [3] Yager class :-

$$S_w(a,b) = \min \left[ 1, (a^w + b^w)^{1/w} \right] \text{ where } 0 < w < \infty$$

— النوع الأول من المسائل على هذه الجزئية أن يعطى هور و المطلوب أن تحقق الشروط الأربعة .

— النوع الثاني : أن يعطى فئتان إما فترات وإما متقطعة و المطلوب حساب الإيجاد باستخدام الهور السابقة .

[EX] show that Dombi union operation satisfy S-norm operator.

[solution]

$$S_2(a,b) = \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1}{a} - 1 \right)^{-2} + \left( \frac{1}{b} - 1 \right)^{-2} \right]^{1/2}}$$

$$a = M_A(x) \quad ; \quad b = M_B(x)$$

من نأخذ الشرط :-

[1]

$$S[1,1] = 1 \quad ; \quad S(0,a) = \frac{1}{1 + \left[0 + \left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda}\right]^{-1/\lambda}}$$

~~$$S(a,0) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} + 0\right]^{-1/\lambda}}$$~~

$$1 + \left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} = \frac{1}{a} \quad \therefore S(0,a) = a$$

$$S(a,0) = a \quad \Rightarrow \quad \therefore S(0,a) = S(a,0) = a$$

[2]

$$S(a,b) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda}\right]^{-1/\lambda}}$$

$$= \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda}\right]^{-1/\lambda}} = S(b,a)$$



$$\boxed{3} \quad a \leq \bar{a} ; b \leq \bar{b} \Rightarrow S(a, b) \leq S(\bar{a}, \bar{b})$$

$$a \leq \bar{a} \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{\bar{a}}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{a} - 1 \geq \frac{1}{\bar{a}} - 1$$

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} \geq \left(\frac{1}{\bar{a}} - 1\right)^{-\lambda} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} \leq \left(\frac{1}{\bar{a}} - 1\right)^{-\lambda}$$

$$\left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda} \leq \left(\frac{1}{\bar{b}} - 1\right)^{-\lambda} \quad \underline{\underline{\text{بالمثل}}}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda}}_{*} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\bar{a}} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{\bar{b}} - 1\right)^{-\lambda}}_{**}$$

$$\left[ \begin{array}{c} * \\ * \end{array} \right]^{-\frac{1}{\lambda}} \geq \left[ \begin{array}{cc} * & * \end{array} \right]^{-\frac{1}{\lambda}}$$

$$1 + \left[ \begin{array}{c} * \end{array} \right]^{-\frac{1}{\lambda}} \geq 1 + \left[ \begin{array}{cc} * & * \end{array} \right]^{-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\frac{1}{1 + [ * ]^{\frac{-1}{\lambda}}} \leq \frac{1}{1 + [ ** ]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$\Rightarrow S(a, b) \leq S(\bar{a}, \bar{b})$$

4]  $S(S(a, b), c) \leq S(a, S(b, c))$  ?

$$\text{L.H.S} \leq S(S(a, b), c) = \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1}{S(a, b)} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{c} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$\frac{1}{S(a, b)} \leq 1 + \left[ \left( \frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{\frac{-1}{\lambda}}$$

$$\left( \frac{1}{S(a, b)} - 1 \right)^{-\lambda} = \left( \frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} \quad \text{~~XXXXXXXXXX~~}$$

$$\text{L.H.S} = \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{c} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{\frac{-1}{\lambda}}} \quad \downarrow \quad \boxed{11}$$



$$S(a, S(b, c)) = R.H.S$$

1

$$S \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{S(b, c)} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{\frac{1}{\lambda}}}$$

1

$$S(b, c) S \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{c} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$\left( \frac{1}{S(b, c)} - 1 \right)^{-\lambda} S \left( \frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{c} - 1 \right)^{-\lambda}$$

بالعويض

1

$$R.H.S S \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} + \left( \frac{1}{c} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$R.H.S = L.H.S \quad \neq$$